НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 515.1 : 621.9.09.02.001.2

Э.К. СМОРЩКОВ

Монреаль, Канада

ГРАФО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ (ИНТЕРПРЕТАЦИИ) НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Известно, что сочетание аналитических и графических расчетов всегда эффективно. Усвоение учебного материала оказывается глубже и устойчивее, а проведение исследований — более успешным. Важнейшими звеньями должны стать, во-первых, определение круга задач и, во-вторых, отыскание эквивалентных моделей. «...Важно, чтобы геометрические построения и вычисления были внутренне связаны с рассматриваемыми объектами. Тогда геометрические фигуры все время будут находиться в поле зрения исследователя...» [1]. В развитие [2] покажем несколько примеров из теории пределов. Пусть требуется определить значение пределов следующих соотношений:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{3x^2+2} \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3-3x}{7x^2+9} \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 36} f(x) = \lim_{x\to 36}\frac{\sqrt{x}-6}{x-36} \qquad (3)$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t-1}{t},\frac{\sqrt{1+t}-1}{t},\frac{3}{1+t}\right] \qquad (4)$$

В двух первых примерах при подстановке значений аргумента возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, а в третьем — неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Известно, что раскрывать такие неопределенности можно несколькими способами, в т.ч. применяя правило Г. Лопиталя (фр. математика — 1661 — 1704 г.г.). Отметим, что в дванном случае нас прежде всего интересует графо-геометрическая сторона как исходных данных, так и процесса решения. Рассмотрим подробнее соотношение (1). Обозначим числитель как функцию

$$\psi(x) = x^2+2x-1 \qquad (5)$$

Последнее выражение задает параболу, у которой координаты вершины могут быть определены по известным зависимостям: $x=-\frac{b}{2a}$, где $b=2$, $a=1$. Тогда $x=-1$ и $\psi(x)=1-2-1=-2$. Положив $x=0$, найдем координату пересечения параболы с осью $\psi(x)$. Имеем $\psi(x) = -1$. При $\psi(x) = 0$ получаем

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm 1{,}41.$$

Значит, $x_1 = 0{,}41$ и $x_2 = -2{,}41$

Обозначим знаменатель как функцию

$$\omega(x) = 3x^2 + 2, \qquad (6)$$

задающую также параболу, у которой координаты x, $\omega(x)$ вершины будут соответственно равны 0 и 2. При этом ось $\psi(x)$ совместим с $\omega(x)$. В общепринятом смысле такую ось координат принято считать осью ординат и обозначать как игрек. Отношение функции $\psi(x)$ к функции $\omega(x)$ можно реализовать в соответствии с методикой, изложенной в [2] путем двух преобразований. Вначале получить соотношение $\frac{1}{\omega(x)}$, а затем преобразовать его в $\frac{1}{\omega(x)} \times \psi(x)$. Не задаваясь целью проанализировать характер искомой линии, отметим, что она пройдет через точки -2,41 и 0,41 горизонтальной оси координат и $-0.5 = \frac{-1}{2}$ вертикальной оси (рис.1). При всем этом мы пока не достигли результата в определении предела, хотя и приблизились в направлении цели. Дальнейшие шаги должны быть направлены в сторону графо-геометрической версии правила Лопиталя в раскрытии неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. С аналитической точки зрения необходимо вначале вычислить первые производные функций $\psi(x)$ и $\omega(x)$.

$$\psi'(x) = 2x + 2,$$

$$\omega'(x) = 6x \qquad (7)$$

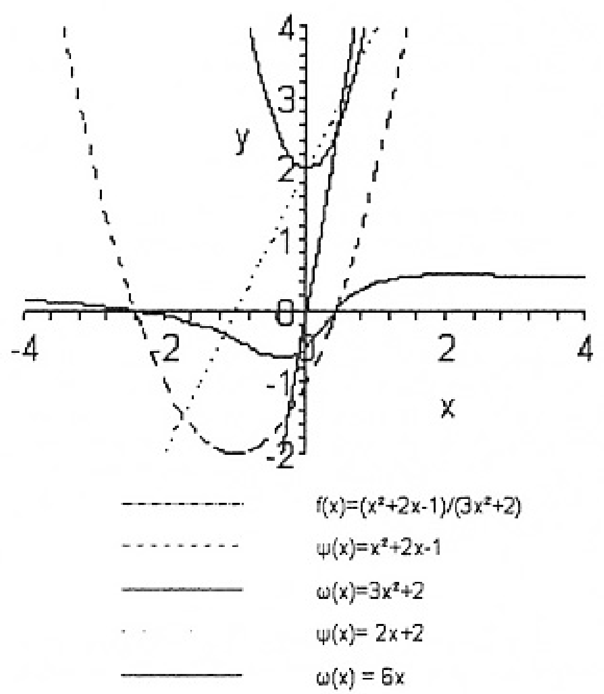

Рис. 1.

Графики этих функций представляют собой прямые линии с угловыми коэффициентами соответственно 2 и 6. Частное от деления значений названных коэффициентов будет являться пределом соотношения (1). По правилу Лопиталя требуется еще одно действие, а именно вычисление второй производной от функций $\psi(x)$ и $\omega(x)$. Следовательно, имеем:

$$\psi''(x) = 2,$$

$$\omega''(x) = 6.$$

С геометрических позиций этим значениям соответствуют две прямые, параллельные оси x и имеющие ординаты соответственно 2 и 6.

Итак,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

В случае перестановки местами числителя и знаменателя в соотношении (1) значение предела будет равно 3.

Как видно, установлена полная аналогия аналитических, графо-геометрических расчетов и построений.

Проанализируем соотношение (2). В этой части, полагая, что задача решена, т.е. требуемый предел найден, следует разыскать такие зависимости, которые позволят свести данную задачу к другим, известным ранее [3]. Сравнивая (2) с (1), видим, что в том и другом случае задано отношение двух многочленов. Следовательно, можно применить одну и ту же методику решения, а именно:

а) обозначим числитель $x^4 - x^3 - 3x$ через $\psi(x)$, и знаменатель $7x^2 + 9$ через $\omega(x)$. Выражение $\psi(x)$ задает кривую четвертого порядка, а $\omega(x)$ — параболу второго порядка;

б) применяя последовательно правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Графики функций, участвующих в решении, показаны на рис. 2. Расширим поставленную задачу. Предварительно условимся функции $\psi(x) = x^4 - x^3 - 3x$, $\psi'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 3$, $\psi''(x) = 12x^2 - 6x$, $\psi'''(x) = 24x - 6$, $\psi''''(x) = 24$ называть семейством функций числителя, в то время как функции $\omega(x) = 7x^2 + 9$, $\omega'(x) = 14x$, $\omega''(x) = 14$ — семейством. функций знаменателя. Поставим дополнительную задачу: на линиях семейств найти точки, у которых касательные проходят под наперед-заданным углом наклона α. Пусть угол $\alpha = \operatorname{arctg} 6 = 80°33'$. Точками семейства знаменателя являются А и В. Точками семейства числителя будут: I и K, G и H, E и F, C и D. Поясним сказанное на примере первых двух точек;

в) вначале отметим точку А пересечения линии $\varpi'(x)$ с прямой, у которой $y = 6$. Используя соответствующую формулу, получаем $x_A = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$;

г) после этого через точку А проведем вертикальную прямую до пересечения с линией $\omega(x)$. Полученную точку обозначим буквой В, у которой $x_B = \frac{3}{7}$, а $y_B = \omega(x) = 7(\frac{3}{7})^2 + 9 = \frac{9}{7} + 9 = \frac{72}{7} = 10{,}285714$. Таким образом, маршрут построений начинается от последую-

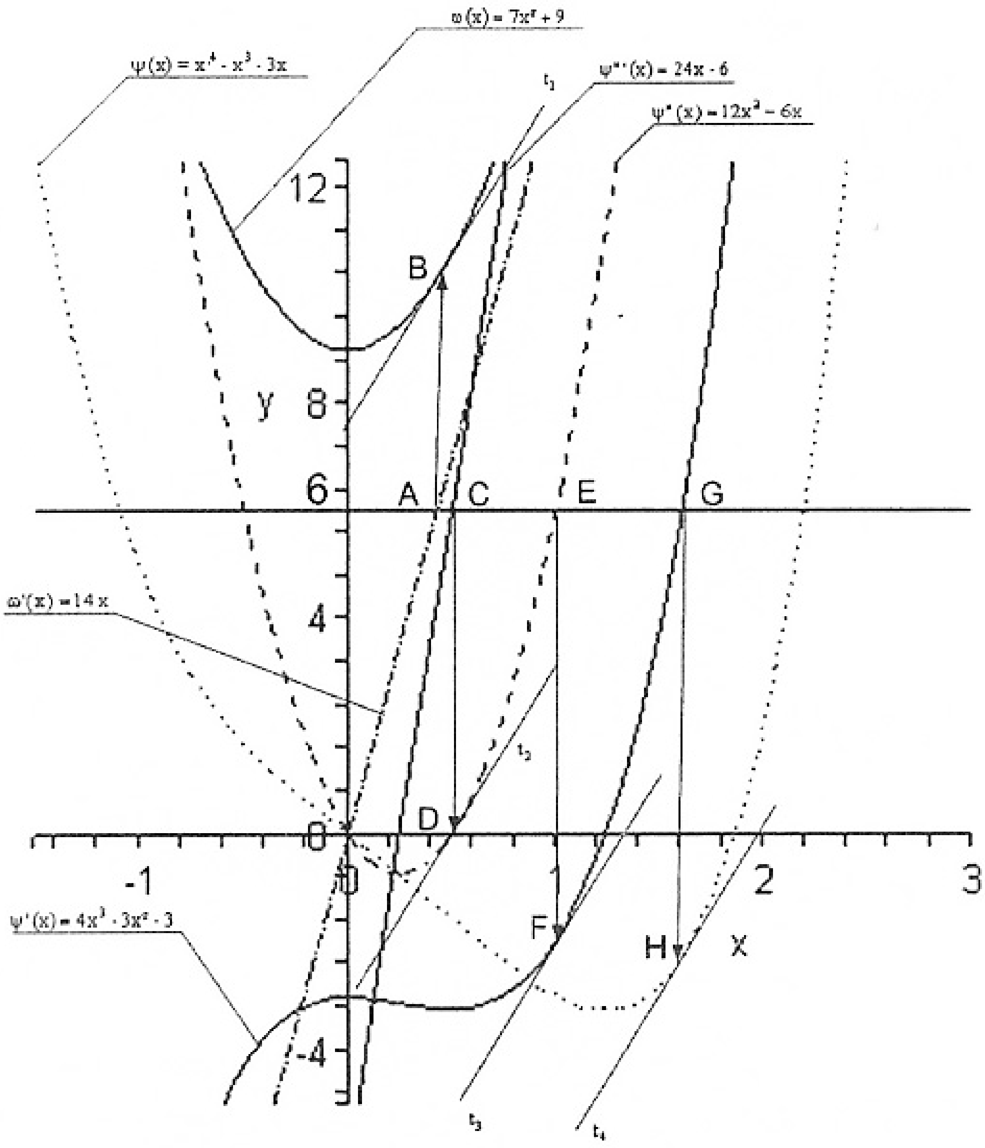

Рис. 2.

щей линии (в данном случае первой производной) и заканчивается на предыдущей (в данном случае исходной) того же семейства линий. Аналогично строятся другие пары точек. На рис.2 графики функций $\psi'''(x)$ и $\omega''(x)$ не показаны.

Соотношение (3). Покажем аналитическое решение, основанное на использовании правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to 36}\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}=\lim_{x\to 36}\frac{x^{\frac{1}{2}}-6}{x-36}=\lim_{x\to 36}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 36}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\times 6}=\frac{1}{12} \qquad (8)$$

Графо-геометрическая интерпретация показана на рис.3.

Последний пример, соотношение (4), относится к случаю задания пространственной линии в параметрической форме. В квадратных скобках приведены уравнения, по которым рассчитывают соответственно значения пределов координат x, y, z, когда параметр t стремится к нулю. Рассмотрим поочередно выражения

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t},\ \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t},\ \lim_{t\to 0}=\frac{3}{1+t}$$

Два первых соотношения приобретают неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Введем обозначения:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=m, \qquad (9)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}=n \qquad (10)$$

Пусть в (9) и (10)

$$\frac{e^t-1}{t}=\psi(t), \qquad (11)$$

$$e^t-1=\omega(t), \qquad (12)$$

$$\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}=\tau(t). \qquad (13)$$

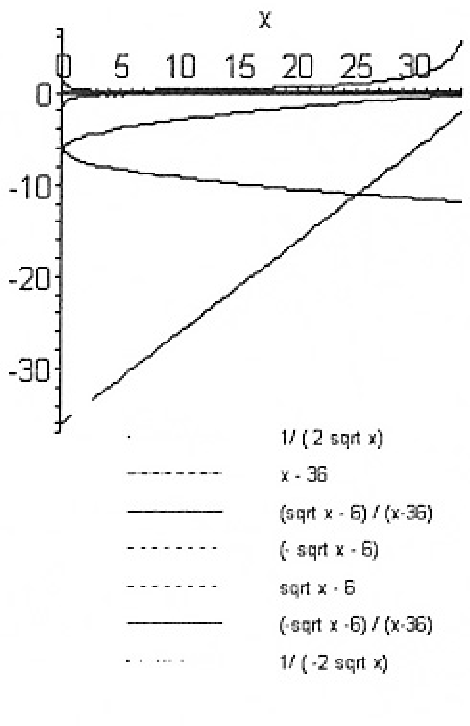

Рис. 3.

Применив правило Лопиталя, получаем:

$$\psi'(t) = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)' = \frac{e^t}{1} = e^t \text{ и } \tau'(t) = \left(\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} e^t = 1 \text{ и } \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}.$$

Графо-геометрическая модель, адекватная рассмотренной аналитической, представлена на рис.4. При этом оси x и y совмещены для компактности чертежа. Рассмотренная линия является пространственной спиралью, одна из точек которой имеет координаты: $x_0 = 1$, $y_0 = 0{,}5$, $z_0 = 3$. При $t \to \infty$ значение $x \to \infty$, $y \to 0$ и $z \to 0$ Причем t не может быть меньше, чем -1.

В заключение остается сослаться на чрезвычайно емкую, на наш взгляд, цитату: «... Общеизвестно, что геометрическая интерпретация алгебраических задач, или иначе – перевод алгебраической задачи на геометрический язык, является эффективным средством решения задач. Это помогает и найти решение, и убедиться в его правильности или обнаружить ошибку...» [5].

Выводы:

1. В случае, когда аргумент стремится к какому-либо числу из рационального ряда, графо-геометрическая модель чаще всего сводится лишь к построению графиков функций, а значение предела отношения – к вычислению отношения $\frac{\psi(x)}{\omega(x)}$.

2. Графо-геометрические модели определения пределов отношения $f(x)$ многочленов разделяются на три группы в зависимости от конфигурации функций $\psi(x)$ и $\omega(x)$.

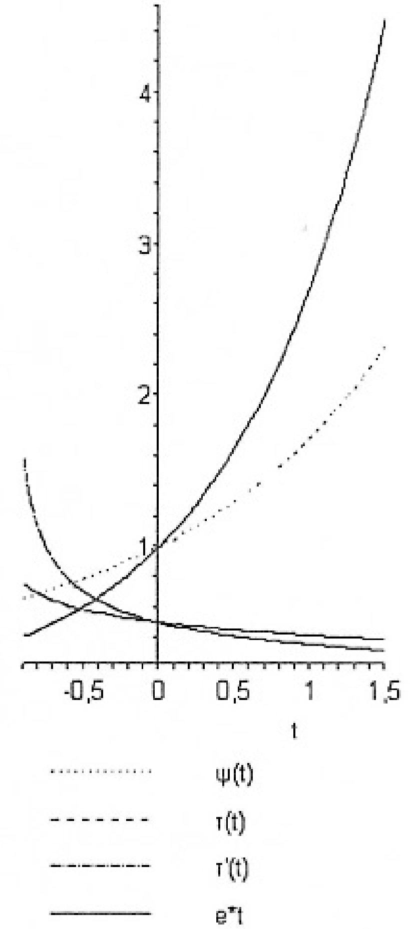

Рис. 4.

3. В этой связи при возникновении неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, либо $\frac{\infty}{\infty}$ указанные модели строятся на основании выполнения преобразований заданных функций с целью приведения их к виду $\psi_n(x) = a$ и $\omega_n(x) = b$, где n задает число производных, равное показателю степени многочленов. В свою очередь, a и b приобретают значения из рационального ряда чисел.

4. В случае, когда $\psi(x)$, $\omega(x)$ – сложные функции, графо-геометрическая модель определения пределов отношения функций строится на основе выполнения композиций биективных геометрических преобразований.

Библиографический список

1. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. М., Л, 1949.
2. Сморщков Э.К. Моделирование композиций биективных преобразований дискретных линий и их семейств. Сборник статей «Омский научный вестник» № 4, Омск, 2006.
3. Лурье М.В. Геометрия. Техника решения задач. «Феникс», Ростов-на-Дону, М., 2002.
4. Maple 9.5 Getting Started Guide. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2004.
5. Дорофеев Г.В., Муравин Г.К., Седова Е.А. Математика. 11 класс, «Дрофа», М., 2001.

СМОРЩКОВ Эдуард Константинович.

Статья поступила в редакцию 30.06.06